Ogólna teoria całki
Lista 7

Zad 1. Wykazać, że jeżeli $f \in \mathcal{L}^p_\mu(X)$ dla dostatecznie dużych p, to $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Zad 2. Wykazać *nierówność Höldera* (1884), tj. dla wykładników sprzężonych $1 \leq p, q \leq \infty$, czyli takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ zachodzi

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

gdzie $f \in \mathcal{L}^p_\mu(X)$, $g \in \mathcal{L}^q_\mu(X)$. Pokazać, że równość w powyższym wzorze zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją stałe α, β takie, że $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ (prawie wszędzie).

Zad 3. Udowodnić, że jeśli $f, g \in \mathcal{L}^p_\mu(X)$ i $p \geq 1$, to zachodzi nierówność, zwana *nierównością Minkowskiego*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Definicja. Zbiór $\mathcal{L}^0_\mu(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : \int_X f d\mu = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową każdej z przestrzeni $\mathcal{L}^p_\mu(X)$, $p \in (0, \infty]$. Kładziemy $L^p_\mu(X) := \mathcal{L}^p_\mu(X)/\mathcal{L}^0_\mu(X)$, $p \in (0, \infty]$.

Zad 4. Pokazać, że przestrzeń $L^p_\mu(X)$

a) dla $p \in [1, \infty]$ jest przestrzenią unormowaną z normą $\|\cdot\|_p$.

b) dla $p \in (0, 1)$ jest przestrzenią metryczną z metryką $d(f, g) = \|f - g\|^p_p$.

Zad 5. Zbadać zbieżność ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeniach $L^p_\mu([0, 1])$, $p \in (0, \infty]$, gdy

a) $f_n(t) = t^n$, *b)* $f_n(t) = n^{\frac{2}{3}} \cdot I_{[0,\frac{1}{n}]}(t)$, *b)* $f_n(t) = \sqrt{n} \cdot I_{[0,\frac{1}{n}]}(t^4)$

Zad 6. Wykazać, że jeżeli μ jest miarą skończoną oraz $0 < p \leq q < \infty$, to dla każdego $f \in L^q_\mu(X)$ mamy

$$\left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X |f|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Zad 7. Udowodnić, że jeżeli miara μ jest skończona, to przestrzenie $L^p_\mu(X)$ tworzą ciąg zstępujący:

$$L^\infty_\mu(X) \subset L^q_\mu(X) \subset L^p_\mu(X), \qquad \text{gdzie} \quad 0 < p < q \leq \infty$$

Pokazać na przykładzie miary Lebesgue'a na odcinku $[0, 1]$, że powyższej inkluzji nie można zastąpić równością.

Zad 8. Przestrzenie $L^p_\mu(\mathbb{N})$, gdzie μ jest miarą liczącą oznaczamy przez ℓ^p. Wykazać, że przestrzenie ℓ^p tworzą ciąg wstępujący:

$$\ell^p \subset \ell^q \subset \ell^\infty, \qquad \text{gdzie} \quad 0 < p < q \leq \infty.$$

Pokazać, że powyższej inkluzji nie można zastąpić równością.

Zad 9. Udowodnić, że jeżeli ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do f w przestrzeni $L^p_\mu(X)$, $p \in (0, \infty]$, to ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $f$według miary μ. Pokazać na przykładzie, że implikacja odwrotna nie zachodzi.

Zad 10. Niech $p, q \in (0, \infty]$. Pokazać, że jeżeli ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do f w przestrzeni $L^p_\mu(X)$ oraz do g w przestrzeni $L^p_\mu(X)$, to $f = g$ prawie wszędzie.

Zad 11. Podać przykład ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w $L^p_\mu([0, 1])$, $p \in (0, \infty]$ zbieżnego punktowo do zera, ale rozbieżnego w przestrzeni $L^p_\mu([0, 1])$

Zad 12. Podać przykład ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w $L^p_\mu([0, 1])$, $p \in (0, \infty]$ zbieżnego do zera w przestrzeni $L^p_\mu([0, 1])$ oraz rozbieżnego punktowo (prawie wszędzie).